S E S 2 0 1 3
Ninth Scientific Conference with International Participation
SPACE, ECOLOGY, SAFETY
20 – 22 November 2013, Sofia, Bulgaria

ТЕОРЕМА ЗА РЕЗОНАНСНИЯ ХАМИЛТОНИАН НА НЕАВТОНОМНА КОЛЕБАТЕЛНА СИСТЕМА

Костадин Шейретски[1], Румен Шкевов[2], Николай Ерохин[3]

[1]Университет за национално и световно стопанство
[2]Институт за космически изследвания и технологии – Българска академия на науките
[3]Институт за космически изследвания – Руска академия на науките
e-mail: ksheiretsky@space.bas.bg

Ключови думи: *нелинейна динамика, Хамилтонови системи*

Резюме: *Разгледана е неавтономна динамична система често срещана при движението на спътник около центъра на масата. Изведен е резонансният хамилтониан в променливи действие ъгъл. Определени са условията за устойчивост на стационарните точки.*

A THEOREM ON RESONANT HAMILTONIAN OF NONAUTONOMOUS OSCILATING SYSTEM

Kostadin Sheyretski[1], Rumen Shkevov[2], Nikolay Erokhin[3]

[1]University of National and World Economy
[2]Space Research and Technology Institute – Bulgarian Academy of Sciences
[2]Space Research Institute – Russian Academy of Sciences
e-mail: ksheiretsky@space.bas.bg

Keywords: *Nonlinear dynamics, Hamiltonian systems*

Abstract: *A frequently occurred in satellite movement around center of mass nonautonomous dynamic system is considered. The resonant Hamiltonian in action – angle variables is derived. The stability conditions of stationary points are determined.*

Постановка на математическия проблем

Разглеждаме неавтономна динамична система, която се среща в небесната механика при анализ на движението на спътник около центърана масата му [1]. Математическите изводи ще се направят без да се отчита конкретната физическа природа на моделираният обект. Изследвания хамилтониан е от вида:

$$H = \frac{\overline{p}^2}{2} - \omega_0{}^2 \cos \overline{q} - \tilde{\varepsilon} F_1 \cos\left(k_1 \overline{q} - \Omega_1 t\right); \; 0 < \tilde{\varepsilon} << 1, \tag{1}$$

където ω_0, k_1, Ω_1, и F_1 са реални параметри, $\overline{p}$ и $\overline{q}$ са съответно импулса и координатата на системата.

Първите два члена на (1) съвпадат с хамилтониана на махалото, последния член разглеждаме като смущение.

Поставяме задача да се изследват *основните и вторичните резонанси на неавтономната динамична система.*

Канонични трансформации на хамилтониана

Първоначално ще преобразуваме несмутения хамилтониан чрез канонична замяна на променливите [2]. Разлагаме косинуса в ред на Тейлър и се ограничаваме с първите три члена

(2) $$H_0 = \frac{\overline{p}^2}{2} + \frac{\omega_0{}^2\overline{q}^2}{2} - \frac{\omega_0{}^2\overline{q}^4}{4!} + \frac{\omega_0{}^2\overline{q}^6}{6!} - \ldots.$$

Въвеждат се новите канонични променливи действие и ъгъл, посредством формулите

(3) $$\overline{q} = \sqrt{\frac{2J}{\omega_0}}\sin\hat{\theta},$$

$$\overline{p} = \sqrt{2J\omega_0}\cos\hat{\theta}.$$

Заместваме (3) в израза за хамелтониана (2) и получаваме като резултат

(4) $$H_0 = \omega_0 J - \frac{J^2}{6}\sin^4\hat{\theta} + \frac{J^3}{90\omega_0}\sin^6\hat{\theta} - \ldots$$

Първият член съответства на квадратичната част на първоначалния хамелтониан (2), него разглеждаме в качеството на несмутена динамична система

(5) $$H_{00} = \omega_0 J,$$

останалата част разглеждаме като смущение

(6) $$\tilde{\varepsilon}H_{01} = -\frac{J^2}{16}\sin^4\hat{\theta} + \frac{J^3}{90\omega_0}\sin^6\hat{\theta}.$$

Следваме метода на Поанкаре [3] и търсим такова канонично преобразование $J,\hat{\theta} \to \overline{J},\overline{\theta}$, че в новите променливи, новополученият хамилтониан да е функция само на променливата действие. Избира се производяща функция

(7) $$\tilde{F} = \tilde{F}\left(\overline{J},\hat{\theta}\right),$$

понеже преобразуванието е канонично, изпълнени са следните отношения

(8) $$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\hat{\theta}} = J, \quad \frac{\partial\tilde{F}}{\partial\overline{J}} = \overline{\theta}.$$

Разлагаме производящата функция в ред

(9) $$\tilde{F} = \overline{J}\hat{\theta} + \tilde{F}'$$

Като използваме съотношенията, намираме връзката между старите и новите променливи, като се ограничаваме до първа степен на $\tilde{\varepsilon}$

(10) $$J = \overline{J} + \frac{\partial\tilde{F}'}{\partial\hat{\theta}},$$

$$\hat{\theta} = \overline{\theta} - \frac{\partial\tilde{F}'}{\partial\overline{J}}.$$

Заместваме в израза за хамилтониана (4) и разлагаме в ред като отново се ограничаваме до първите два члена, съответно за несмутената и смутената част се получава:

(11) $$H_{00}(J) = H_{00}\left(\overline{J} + \frac{\partial\tilde{F}'}{\partial\hat{\theta}}\right) = H_{00}\left(\overline{J}\right) + \frac{dH_{00}}{d\overline{J}}\frac{\partial F'}{\partial\overline{\theta}},$$

(12) $$\varepsilon H_{01}\left(J,\hat{\theta}\right) = \tilde{\varepsilon}H_{01}\left(\overline{J},\overline{\theta}\right).$$

Определят се членовете на новия хамилтониан

(13) $$\overline{H}_{00} = H_{00}\left(\overline{J}\right),$$

(14) $$\tilde{\varepsilon}\overline{H}_{01} = \omega_0\left(\overline{J}\right)\frac{\partial F'}{\partial\overline{\theta}} + \tilde{\varepsilon}H_1\left(\overline{J},\overline{\theta}\right).$$

Достига се до израза

(15) $$\overline{H} = \omega_0\overline{J} + \omega_0\frac{\partial F}{\partial\overline{\theta}} - \frac{\overline{J}^2}{6}\sin^4\overline{\theta}.$$

Определят се осреднената $\langle H_{01}\rangle$ и променливата част $\{H_{01}\}$ на H_{01} посредством изразите

(16) $\langle H_{01}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_{01}(\bar{J},\bar{\theta})d\bar{\theta} = -\frac{\bar{J}^2}{16}$, $\{H_{01}\} = H_{01} - \langle H_{01}\rangle$.

От равенството за $\overline{H}_{01}$, се намират следните съотношения

(17) $\omega\frac{\partial F}{\partial\hat{\theta}} = -\{H_{01}\}$,

(18) $\overline{H}_{01} = -\frac{\bar{J}^2}{16}$

Разглеждаме смутената част на хамилтониана:

(19) $\tilde{\varepsilon}H_1 = -\tilde{\varepsilon}F_1\cos(k_1 q - \Omega_1 t)$.

Правим замяна на променливите и разлагаме в ред косинусите

(20) $\tilde{\varepsilon}H_1 = -\tilde{\varepsilon}F_1\sum_s J_s\left(k_1\sqrt{\frac{2J}{\omega_0}}\right)\cos(s\hat{\theta} - \Omega_1 t)$,

където J_s са Беселови функции от първи род.

Окончателният вид на хамилтониана се записва във вида

(21) $\overline{H} = \omega_0\bar{J} - \frac{\bar{J}^2}{16} - \tilde{\varepsilon}F_1\sum_s J_s\left(k_1\sqrt{\frac{2\bar{J}}{\omega_0}}\right)\cos(s\theta - \Omega_1 t)$.

Резонансен хамилтониан

Нека е изпълнено $n\frac{\partial\overline{H}}{\partial\bar{J}} - \Omega_1 = 0$, $n \in Z$. Отделяме резонансния член в хамилтониана

(22) $\overline{H} = \omega_0\bar{J} - \frac{\bar{J}^2}{16} - \tilde{\varepsilon}F_1 J_n\left(k_1\sqrt{\frac{2\bar{J}}{\omega_0}}\right)\cos(n\hat{\theta} - \Omega_1 t) - \tilde{\varepsilon}F_1\sum_{s\neq n} J_s\left(k_1\sqrt{\frac{2\bar{J}}{\omega_0}}\right)\cos(s\hat{\theta} - \Omega_1 t)$

Приема се, че изразите зад сумите са смущение и се подлагат на анализ само резонансните членове.

Извършва се канонична замяна, като използваме производящата функция

(23) $S = -\frac{\bar{J}}{n}(\Psi + \Omega_1 t)$.

Новите канонични променливи са съответно

(24) $I = \frac{\bar{J}}{n}$,

$\Psi = n\hat{\theta} - \Omega_1 t$,

отчита се и фактът, че

(25) $\frac{\partial S}{\partial t} = -I\Omega_1$.

В новите канонични променливи резонансния хамилтониан (22) приема вида

$$\overline{H} = (n\omega_0 - \Omega_1)I - \frac{n^2 I^2}{16} - \tilde{\varepsilon}F_1 J_n\left(k_1\sqrt{\frac{2nI}{\omega_0}}\right)\cos\Psi - \tilde{\varepsilon}F_1\sum_{s\neq n} J_s\left(k_1\sqrt{\frac{2nI}{\omega_0}}\right)\cos\left(\frac{s}{n}\Psi - \Omega_1\left(1 - \frac{s}{n}\right)t\right).$$

(26)

Изследваме първите три члена в израза (23), а останалата част се приема за смущение

Изследване на стационарните точки на хамилтониана

(27) $$H_r = (n\omega_0 - \Omega_1)I - \frac{n^2 I^2}{16} - \tilde{\varepsilon} F_1 J_n\left(k_1\sqrt{\frac{2nI}{\omega_0}}\right)\cos\Psi .$$

Производните на променливите по времето намираме чрез диференциране на резонансния хамилтониан

(28) $$\dot{\Psi} = \frac{\partial H_r}{\partial I} = (n\omega_0 - \Omega_1) - \frac{n^2 I}{8} - \tilde{\varepsilon} F_1 k_1\sqrt{\frac{n}{2\omega I}} J_n{}'\left(k_1\sqrt{\frac{2nI}{\omega_0}}\right)\cos\Psi$$

$$\dot{I} = -\frac{\partial H_r}{\partial \Psi} = -\tilde{\varepsilon} F_1 J_n\left(k_1\sqrt{\frac{2nI}{\omega}}\right)\sin\Psi .$$

Стационарните точки се намират като приравняваме на нула производните на действието и на ъгъла по времето, нека тези стойности са съответно

(29) $I = I_0$, $\Psi = \Psi_0$.

Изследваме динамичната система в близост до резонансните стойности на променливите

(30) $$I = I_0 + \eta ,$$
$$\psi = \psi_0 + \xi .$$

Полагаме $\Delta = n\omega_0 - \Omega_1$ и записваме резонансния хамилтониан

(31) $$H_r = \Delta I_0 + \Delta\eta - \frac{n^2 I_0{}^2}{16} - \frac{n^2\eta^2}{16} - \frac{n^2 I_0 \eta}{8} - \\ - \tilde{\varepsilon} F_1 J_n\left(k_1\sqrt{\frac{2n(I_0+\eta)}{\omega_0}}\right)\cos(\Psi_0 + \xi)$$

Разлагаме израза и по двете променливи в ред, като взимаме първите три члена

$$\Delta I_0 + \Delta\eta - \frac{n^2 I_0{}^2}{16} - \frac{n^2\eta^2}{16} - \frac{n^2 I_0\eta}{8} -$$
$$-\tilde{\varepsilon} F_1\left\{J_n\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right) + J_n{}'\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)k_1\sqrt{\frac{n}{2\omega I_0}}\eta + \left[J_n{}''\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\frac{k_1{}^2 n}{2\omega_0 I_0} - J_n{}'\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\frac{k_1}{I_0{}^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{n}{8\omega_0}}\right]\frac{\eta^2}{2}\right\}x$$
$$x\left(\cos\Psi_0 - \sin\Psi_0\xi - \frac{\cos\Psi_0}{2}\xi^2 + ...\right).$$

(32)

Очевидно е, че ако $\Psi_0 = s\pi, s \in Z$ може да се достигне до израз за хамилтониан на линеен осцилатор. Като имаме предвид това и се извърши групиране на членовете пред еднаквите степени на η се достига до израза

$$\Delta I_0 - \frac{n^2 I_0{}^2}{16} - \tilde{\varepsilon} F_1 J_n\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\cos\Psi_0 + \eta\left[\Delta - \frac{n^2 I_0}{8} - \tilde{\varepsilon} F_1 J_n{}'\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)k_1\sqrt{\frac{n}{2\omega_0 I_0}}\cos\Psi_0\right] -$$
$$-\left\{\frac{n^2}{16} + \frac{\tilde{\varepsilon} F_1}{2}\left[J_n{}''\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\frac{k_1{}^2 n}{2\omega_0 I_0} - J_n{}'\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\frac{k_1}{I_0{}^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{n}{8\omega_0}}\right]\cos\Psi_0\right\}\eta^2 + \frac{\tilde{\varepsilon} F_1 J_n\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\cos\psi_0}{2}\xi^2 =$$
$$= H_r .$$

(33)

Отчита се, че израза пред първата степен на η е равен на нула. Следователно окончателния вид на хамилтониана е

$$-\left\{\frac{n^2}{16}+\frac{\tilde{\varepsilon}F_1}{2}\left[J_n''\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\frac{k_1^{\,2}n}{2\omega_0 I_0}-J_n'\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\frac{k_1}{I_0^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{n}{8\omega_0}}\right]\cos\Psi_0\right\}\eta^2+$$

$$+\frac{\tilde{\varepsilon}F_1 J_n\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\cos\psi_0}{2}\xi^2=H_r-H_{r0},$$

(34)

където ξ и η са малки отклонения съответно от резонансното действие и ъгъл,

$$\Delta I_0-\frac{n^2 I_0^{\,2}}{16}-\tilde{\varepsilon}F_1 J_n\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\cos\Psi_0=H_{r0}.$$

Доказахме следната теорема:

Теорема. *Ако е даден хамилтониана (1) то тогава резонансния хамилтониан в променливи действие-ъгъл се дава с израза(34).*

Условията уравнение (34) да описва уравнение на затворена крива, води до следствието:

Следствие. *Условията за утойчивост на стационарните точки се дават с неравенствата:*

$$\frac{n^2}{16}+\frac{\tilde{\varepsilon}F_1}{2}\left[J_n''\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\frac{k_1^{\,2}n}{2\omega_0 I_0}-J_n'\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\frac{k_1}{I_0^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{n}{8\omega_0}}\right]\cos\Psi_0>0,$$

$$\frac{\tilde{\varepsilon}F_1 J_n\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\cos\psi_0}{2}>0,$$

$$H_r-H_{r0}>0,$$

или

$$\frac{n^2}{16}+\frac{\tilde{\varepsilon}F_1}{2}\left[J_n''\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\frac{k_1^{\,2}n}{2\omega_0 I_0}-J_n'\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\frac{k_1}{I_0^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{n}{8\omega_0}}\right]\cos\Psi_0<0,$$

$$\frac{\tilde{\varepsilon}F_1 J_n\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\cos\psi_0}{2}<0,$$

$$H_r-H_{r0}<0.$$

Заключение

В заключение ще обобщим, че е доказана теорема, която дава резонансния хамилтониан на неавтономна система от вида (1), описващ вторични резонанси на главен резонанс. Чрез нея може да се изследва движението за линейна устойчивост, като резултатите лесно могат да се приложат за реални физични модели, описвани с разгледания тип неавтономно уравнение.

Литература:

1. C e l l e t t i, A., L. C h i e r c h i a. Hamiltonian Stability of Spin–Orbit Resonances in Celestial Mechanics. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy . 2000. Volume 76, Number 4, 229-240.
2. Д. т е р Х а а р, Основы гамильтоновой механики. Наука. Москва, 1974.
3. Ч и р и к о в, Б. В. Нелинейный резонанс, М:. НГУ, 1977.
4. А р н о л ь д, В. И., К о з л о в, В. В., Н е й щ а д т, А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. ВИНИТИ. Москва, 1985.